# Глава II Функциональные последовательности и ряды

## §1. Виды сходимости

~~$\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$~~ $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, на некотором мн-ве $X$ все ф-ции $f_n(x)$ определены.

Опр. Функцион. последовательность $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ — функциональный ряд.

Ex. 1 $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
$X = \mathbb{R}$

Ex. 2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n x^n$, $X = \mathbb{R}$ — степенной ряд.

Опр. Поточечная сходимость $\Leftrightarrow$ сходимость посл-ти (1) и ряда (2) для конкретного значения $x \in X$

Мн-во значений $x \in X$, для которых сходятся (1) ~~и~~ или (2) наз-ся областью (мн-м) сходимости.

Пусть $X_*$ – обл. сходимости (1) [(2)]

Тогда $\forall x \in X_* : \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$

## Равномерная сходимость на множестве

Рассм. $\{f_n(x)\} \to f(x)$, $\forall x \in X_*$

**Опр.** $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на мн-ве $X_0 \subseteq X_*$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \underline{\forall x \in X_0} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

① $\{f_n(x)\}$ сход. к $f(x)$ равномерно на $X_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Рассм. $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| \leq \max\limits_{|x| \leq \frac{1}{2}} |f_n(x)| = (\frac{1}{2})^n < \varepsilon$

Найдётся $N$ $(\forall x \in X_0)$ $\forall n \geq N$ $(\frac{1}{2})^n < \varepsilon$

② Покажем, что, например, на мн-ве $X_0 = [0;1]$ нет равномерной сходимости, т.е.

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n \geq N \ \exists x \in [0;1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$

$n = N$, $x = 1 - \frac{1}{N}$ $\quad |f_n(x) - f(x)| = f_n(1-\frac{1}{N})^N = (1-\frac{1}{N})^N \to \frac{1}{e}$

**Опр.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сход. равном. на $X_0 \subset X_*$, если посл. его част. сумм $\{S_n(x)\} \rightrightarrows S(x)$ на $X_0$

---

**Теор. 1** (критерий Коши)

I $\{f_n(x)\} \rightrightarrows$ на мн-ве $X_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X_0: |f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$

II $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на $X_0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X_0: \underbrace{\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right|}_{= S_{n+p}(x) - S_n(x)} < \varepsilon$

▶ (I) $\Rightarrow$ Из опред.: $\forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}$:

$\forall x \in X_0: \left.\begin{array}{l} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \\ |f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq$

$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < 2\varepsilon$

$\Leftarrow$ Расм.-м нер.-во $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X_0$

Перейдём к пределу при $p \to \infty$ (т.к. $X_0 \subset X_*$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$

$f(x) = \lim\limits_{p \to \infty} f_{n+p}(x)$

Т.о., данное нер-во выполнено $\forall n \geq N$ $\forall x \in X_0 \Rightarrow \{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ ■

**Следствие** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows$ на $X_0$, то $\{u_n(x)\} \rightrightarrows 0$ на $X_0$ (рассм. $p=1$ в условии Коши)

**Зам. 1** Из определения равном. сходимости следует, что если посл. (1) [ряд (2)] равном. сх. на $X_0$, то она [он] равном. сх. на $X_1 \subset X_0$

**Зам. 2** В конкр. примерах, когда известна пред. ф-я для $\{f_n(x)\}$, исслед. равном. сходимости можно свести к выч. предела:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X_0} |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 \iff \text{сход. равном.} \\ \text{иначе} \iff \text{не равном.} \end{cases}$$

**Зам. 3** Пример посл-ти $\{f_n(x)\}$, $f_n(x) = x^n$ на $[0;1]$, показывает, что из равном. сх-ти на $\forall$ отр. $[0;1-\delta]$ не следует равном. сходимость на $[0;1]$

$x \in [0;1-\delta]$, $\delta > 0$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) \le \max_{0\le x\le 1-\delta} |f_n(x)| = f_n(1-\delta) = (1-\delta)^n \to 0, n\to\infty$$

# §2. Признаки равном. сходимости

Теор. 2 (призн. Вейерштрасса равном. сход. рядов)

Пусть в ряде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $\forall n \geq 1, \forall x \in X_0$

Выполнены оценки $|u_n(x)| \leq c_n$, $c_n = const$

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то ряд (2) сходится на $X_0$ равномерно.

▶ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сход. $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_n < \varepsilon.$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \overset{\forall x \in X_0}{\leq} \sum_{k=n+1}^{n+p} c_n < \varepsilon \xrightarrow{m. 1} \ ■$$

Лекция 8
26.09.18

# Признак Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)\left(v_k(x) - v_{k+1}(x)\right) +$$

$$+ S_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - S_n(x) v_{n+1}(x)$$ — тождество Абеля

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

Опр.) $\{f_n(x)\}$ наз. равномерно огр. на $X$, если

$$\exists M > 0 : |f_n(x)| \leq M \quad \forall x \in X, \forall n$$

Опр.) $\{f_n(x)\}$ наз. монотонной на $X$, если $\forall x \in X$

Чис. посл.-ть $\{f_n(x)\}$ мон. возр. [мон. убыв., не возр., не убыв.]

Опр.) $\{v_n(x)\}$ наз. посл.-тью с равномерно-ограниченным изменением на $X$, если

$$(*) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |v_n(x) - v_{n+1}(x)| \rightrightarrows \text{ на } X$$

<u>Утв. 1</u> Если $\{V_n(x)\}$ имеет р. огр. изм. на $X$, то

$\{V_n(x)\} \rightrightarrows$ на $X$

▶ $(*)$ р. сход. на $X \overset{т.1}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall x \in X$

$$\left.\begin{matrix} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |V_k(x) - V_{k+1}(x)| < \varepsilon \\ \text{\rotatebox{90}{$\leq$}} \\ \left| \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (V_k(x) - V_{k+1}(x)) \right| \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(x) - V_{n+1}(x))$$

равном. сход. на $X$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (V_k(x) - V_{k+1}(x)) = V_1(x) - V_{n+1}(x) =$$

$$= V_{n+1}(x) \rightrightarrows V_1(x) - S(x)$$ ■

---

<u>Утв. 2</u> Если $\{V_n(x)\} \rightrightarrows$ на $X$ и монот. на $X$, то $\{V_n(x)\}$ имеет равном. огр. изменение на $X$

▶ $\{V_n(x)\} \searrow\ \forall x \in X \Rightarrow V_n(x) - V_{n+1}(x) \geq 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |V_k(x) - V_{k+1}(x)| = \sum_{k=1}^{\infty} (V_k(x) - V_{k+1}(x))$$

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (V_k(x) - V_{k+1}(x)) = V_1(x) - V_{n+1}(x)$$ ■

Теор. 3 Рассм. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) v_n(x)$ $(**)$ на $X$

Пусть: 1) посл.-ть част. сумм $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ явл. равном. огр.-й на $X$

2) $\{v_n(x)\}$ имеет р. огр. изм. на $X$ и явл. БМ для $\forall x \in X$

Тогда $(**)$ р. сход. на $X$

▶ Для оценки $\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)$ восп.-мся тожд.-м Абеля, исп. константу $M > 0$:

$|S_n(x)| \le M$ $\forall n$ $\forall x \in X$; далее $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N: \forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$ $\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$, $|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}$

(в силу утв. 2)

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} |S_k(x)|\,|v_k(x) - v_{k+1}(x)| +$$

$$+ \underbrace{|S_{n+p}(x)|}_{\le M}\,\underbrace{|v_{n+p}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3M}} + \underbrace{|S_n(x)|}_{\le M}\,\underbrace{|v_{n+1}(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3M}} < \varepsilon$$

■

**Теор. 4** (призн. Дирихле - Абеля)

Пусть 1) $\{S_n(x)\}$ р. огр. на $X$

2) $\{v_n(x)\} \rightrightarrows 0$ на $X$, $\{v_n(x)\}$ монот. на $X$

Тогда (**) р. сход. на $X$

▶ Усл. (2) $\Rightarrow$ усл. (2) Т. 3 ■

---

**Теор. 5** Пусть 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows$ на $X$

2) $\{v_n(x)\}$ имеет р. огр. изм. на $X$ и явл. равном. огр. посл.-тью на $X$

Тогда (**) р. сход. на $X$.

▶ Для док-ва модифицирует тожд.-во Абеля, рассм. $\forall N \in \mathbb{N}$ и вместо $S_n(x)$ рассмотрим суммы след. вида: $\hat{S}_n(x) = \sum\limits_{k=N}^{n} u_k(x)$, $\forall n \geq N$; $\hat{S}_{n+1}(x) - \hat{S}_n(x) = u_{n+1}(x)$ $\forall n \geq N$

$$\forall n \geq N: \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k(x)\left(v_k(x) - v_{k+1}(x)\right) + \hat{S}_{n+p}(x) v_{n+p}(x) - \hat{S}_n(x) v_{n+p}(x)$$

$$\hat{S}(x) = \sum_{k=N}^{n} u_k(x) \quad \forall n \geq N$$

Пусть $M>0$ — константа в оценке $|V_n(x)|\le M$
$\forall n\ \forall x\in X$

Возьмём $\forall\varepsilon>0$ и выберем $N$ так, чтобы

$$\underbrace{\left|\sum_{k=N}^{n} u_k(x)\right|}_{\substack{\wedge \\ S_n(x)}} < \frac{\varepsilon}{3M}\quad \begin{matrix}\forall n\ge N\\ \forall x\in X\end{matrix}\,)\qquad \sum_{k=n+1}^{n+p} |V_k(x)-V_{k+1}(x)| < M \quad \begin{matrix}\forall n\ge N\\ \forall p,\ \forall x\in X\end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\,V_k(x)\right| \le \sum \underbrace{|\hat{S}_k(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3M}} |V_k(x)-V_{k+1}(x)| +$$

$$(***)\quad + \underbrace{|\hat{S}_{n+p}(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3M}}\,\underbrace{|V_{n+p}(x)|}_{\le M} + \underbrace{|\hat{S}_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3M}}\,\underbrace{|V_{n+1}(x)|}_{\le M} < \varepsilon$$

■

Теор. 6 1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows$ на $X$

2) $\{v_k(x)\}$ монотонна на $X$, р. огр. на $X$

Тогда $(**)$ р. сход. на $X$

▶ Используем обозначения д-ва т. 5: $M>0$, выбор $N$

$(***) \Rightarrow \left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{3M} \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| +$

$+ \frac{2}{3}\varepsilon < \frac{\cancel{4}}{3}\varepsilon$

Если $\{v_k\}$ монот.-не возр. на $X$, то $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| =$

$= \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (v_k(x) - v_{k+1}(x)) = v_{n+1}(x) - v_{n+p-1}(x)$ равном. огр.
$\forall n \ge N \quad \forall p \in \mathbb{N}$

на $X$ конст.-й $2M$

## Теор. 7 (Признак Дини)

Рассм. $\{f_n(x)\}$ на $X \subset \mathbb{R}$

Пусть: 1) $X$ — компакт (огр. и замкн. мн-во)

2) $f_n(X)$ — непр.-ны на $X$

3) $\{f_n(X)\}$ монот. на $X$

4) $\{f_n(X)\} \to f(X)$ на $X$

Тогда $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(X)$ на $X$.

---

$\rceil$ $\{f_n(x)\}$ монотонно не убывает на $X$; $\{f_n(x)\} \nearrow f(x)$ $\forall x \in X$

Введём $\{r_n(x)\}$: $r_n(X) = f(X) - f_n(X)$

1) $r_n(X) \in C(X)$

2) $r_n(X) \geq 0$

3) $\{r_n(X)\}$ не возрастает на $X$

4) $r_n(X) \to 0$ $\forall x \in X$

Надо доказать, что $\{r_n(X)\} \rightrightarrows 0$ на $X$

? $r_n(X) \rightrightarrows 0$ на $X$, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n \geq N$ $\forall x \in X$

$$r_n(X) < \varepsilon$$

Пусть это не так $\Leftrightarrow$ $\exists \varepsilon>0\ \forall N\ \exists n\geq N\ \exists \underset{x=x_n}{x\in X}:\ r_n(x)\geq \varepsilon$ МОЖЕТ ЗАВ. ОТ $n$

Посл.-ть $\{x_n\}$ занумерована по возраст. $n$ (т.к. $N$ можно выбирать произвольно): $r_n(x_n)\geq \varepsilon\ \forall n$

Лекция 9
02.10.18

$X$ – компакт $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ явл. огр. $(\{x_n\}\subset X)$ (т. Б.-В.)

Выделим из $\{x_n\}$ сход.-ся подпосл.-ть $\{x_{k_n}\}\to x_0\in X$

Рассм. $\forall m\in\mathbb{N}$. $\exists k_n\geq m$: $r_m(x_{k_n})\geq r_{k_n}(x_{k_n})\geq \varepsilon \Rightarrow r_m(x_{k_n})\geq\varepsilon$

Рассм. теперь след. индекс в подпосл.-ти $k_{n+1}$:

$$k_{n+1}>k_n\geq m \Rightarrow r_m(x_{k_{n+1}})\geq r_{k_{n+1}}(x_{k_{n+1}})\geq\varepsilon$$

Т.о., $r_m(x_{k_{n+1}})\geq\varepsilon$. Продолжая т.обр., получим:

$$r_m(x_{k_l})\geq\varepsilon\quad \forall l\geq n$$

Перейдём к пределу при $l\to\infty$

$x_{k_l}\to x_0$, $\quad r_m(x_{k_l})\to r_m(x_0) \Rightarrow r_m(x_0)\geq\varepsilon$ ■

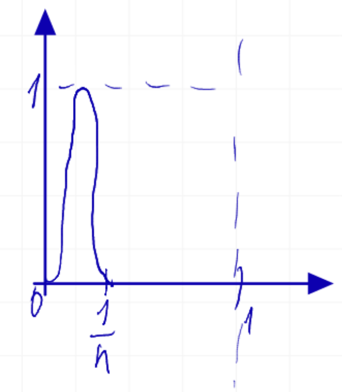
$\boxed{?!\ r_m(x_0)\to 0\ ?}$

страница 13

<u>Зам.</u> Все условия пр.-ка Дини существенны для его утверждения.

---

<u>Ex. 1</u> $f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x), & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$




$\forall x_0 \in (0;1]$, начиная с некот. $n$:

$\frac{1}{n} < x_0 \Rightarrow f_n(x_0) \to 0;\ f_n(0) \to 0$

$f(x) \equiv 0$

$\exists\, \varepsilon = 1\ \forall N\ \exists n = N,\ x_n = \frac{1}{2N}:\ f_n(x_n) = \sin\left(\pi n \frac{1}{2n}\right) = 1 \ge \varepsilon$

Значит, $f_n(x)$ сходится к $f(x)$ неравном. на $X = [0;1]$

В этом примере нарушена <u>только</u> монотонность $\{f_n(x)\}$ в $\forall x \in X$

---

<u>Ex. 2</u> $f_n(x) = x^n,\ x \in X = [0;1]$

$f_n(x) \to \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases} \equiv f(x)$ – не явл. непр. на $X$

$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e} \ne 0$

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$ $\{f_n(x)\}$ не сходится равномерно

<u>Ex. 3</u> Та же посл.-ть $f_n(x)$, но на мн-ве $[0;1)$

$f_n(x)$, $f_n \equiv 0$ — непр. на $X$; монот. на $X$ есть;

нет равном. сходимости: Нарушено единств. условие: $X$ не явл. компактом

---

<u>Ex. 4</u> Рассм. $f_n(x) = \begin{cases} x^n, & 0 \le x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

$X = [0;1]$ — компакт, $f(x) \equiv 0$ $\forall x \in [0;1]$

$f_n(x)$ монотонна $\forall x \in [0;1]$

$\{f_n(x)\}$ не явл. равном. сход. на $[0;1]$

Нарушено: $\forall f_n(x)$ разрывна на $[0;1]$

---

<u>Пример использ. признака Дини:</u>

$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \to e^x = f(x)$

Если $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$, то т.к. $f_n(x)$, $f(x) \in C(X)$, $f_n(x) \nearrow$, то по признаку Дини сходимость на $X$ равномерная

$\{f_n(x)\} \to f(x)$, $x \in X$

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$

## §3 Функциональн. св-ва суммы ряда и предельной ф-ции

Сначала: $X \subset \mathbb{R}$, $x_0$ — предельная для $X$

на $X$ рассм. функциональн. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u(x) \quad \text{(определена на } X\text{)}$$

$$? \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) \qquad (1)$$

---

**Теор. 8** Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} u_n(x) = b_n$ $\forall n$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится к $u$ равномерно на $X$.

Тогда: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится 2) выполнено (1)

▶ 1) По критерию Коши: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)\right| < \varepsilon \ \underset{x\to x_0}{\Longrightarrow} \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ сход.}$$

2) $? \lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n ?$

Т.е. требуется $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X: 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \underbrace{\left|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n\right|}_{\text{левая часть (л.ч.)}} < \varepsilon$$

$$\text{л.ч.} \le \left|\sum_{n=1}^{N} u_n(x) - \sum_{n=1}^{N} b_n\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n\right|$$

$\forall \varepsilon > 0$ выберем $N$ так, чтобы: $\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} b_n\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

(в силу сходимости числов. ряда)

$\left|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} u_n(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ (в силу равном. сход-ти функц. ряда)

Тогда для $\forall x \in X$ : выполн. нер-во:

$$\text{л.ч.} \le \left|\sum_{n=1}^{N} (u_n(x) - b_n)\right| + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Теперь выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |u_n(x) - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3N}$ $\Rightarrow \left|\sum\limits_{n=1}^{N} (u_n(x) - b_n)\right| \le \sum\limits_{n=1}^{N} |u_n(x) - b_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}$

$\forall n = 1, 2, \ldots, N$

■

**Теор. 8'** ] $X \subset \mathbb{R}$ — т. $x_0$ — предельная для $X$

] $\{f_n(x)\} \to f(x)$ на $X$, причём сходимость равномерная на $X$

$\forall n \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} \lim\limits_{x \to x_0} f_n(x)$

---

**Теор. 9** ] $X \subset \mathbb{R}$ и $\{f_n(x)\}$ такова, что:

1. $f_n(x)$ — непрерывен в $\forall x_0 \in X$ (т.е. непр. на $X$)
2. $\{f_n(x)\} \to f(x)$ на $X$, причём сходимость равномерная на $X$

Тогда $f(x)$ непр.-на на $X$

---

**Теор. 9'** ] $X \subset \mathbb{R}$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ таков, что:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сход.-ся на $X$ к $u(x)$, причём равномерно на $X$

2) $u_n(x) \in C(X)$

Тогда $u(x) \in C(X)$

**Замечание** в теор. 8, 8', 9, 9' в кач-ве мн-ва $X$ можно рассматривать мн-во на $\mathbb{R}^m$

$$\left[\, 0<|x-x_0|<\delta \rightsquigarrow 0<\underbrace{\|x-x_0\|}_{\left(\sum_{k=1}^{m}|x^{(k)}-x_0^{(k)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}}<\delta \,\right]$$

---

**Вставка в §2:**

**Теор. 7'** (пр-и Дини для функц. рядов)

Расм. $X$: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in X$

$\exists$
1) $X$ – компакт
2) $u_n(x) \in C(X)$ $\forall n \in \mathbb{N}$
3) сумма ряда $u(x) \in C(X)$
4) $u_n(x) \geq 0$ $\forall x, \forall n$

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $u(x)$ равном. на $X$

§3.1

Зам. $f_n(x)=x^n$ на $X=[0;1]$

$$\Downarrow$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0;1)\\ 1, & x=1\end{cases}$$ – разр. в т. $x=1$

Теоремы не применимы, т.к. нет равном. сх-ти на $X$

---

Теор. 10 ] $\{f_n(x)\}\rightrightarrows f(x)$ на $X=[a;b]$

$\forall n$: $f_n(x)$ интегрируема на $[a;b]$

Тогда: 1) $f(x)$ интегр. на $[a;b]$

2) $$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx$$

▶ 1) Докажем, что $f(x)$ интегрируема, т.е.

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall$ разб. $[a;b]$ с диаметром $<\delta$

$0< S - s<\varepsilon$

верхн. нижн. суммы Дарбу


$$S=\sum_{k=1}^{n}\sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)\,(x_k-x_{k-1})$$

$$s=\sum_{k=1}^{n}\inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x)\,(x_k-x_{k-1})$$

Рассм. $\forall$ разбиение $[a;b]$ и в нём $\forall$ отрезок разб.

$x_{k-1} < x < x_k$

$\forall x', x''$ на этом отр. разбиения:

$$f(x') - f(x'') = \underbrace{f(x') - f_n(x')} + f_n(x') - f_n(x'') + f_n(x'') - f(x'')$$

В силу равном. сходимости:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N$ нер-ва $|f(x') - f_n(x')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$,

$|f_n(x'') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ выполнены независимо от

$x', x'' \in [a,b]$.

Тогда $f(x') - f(x'') < f_n(x') - f_n(x'') + \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$.

Возьмём в правой части $\sup\limits_{x' \in (x_{k-1}, x_k)}$, $\inf\limits_{x'' \in (x_{k-1}, x_k)}$

$\omega_k(f_n)$ колеб. $f_n(x)$ на $[x_{k-1}; x_k]$

$$f(x') - f(x'') < \sup f_n(x') - \inf f_n(x'') + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k] : f(x') - f(x'') < \omega_k(f_n) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_k(f) \le \omega_k(f_n) + \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}$$

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f)(x_k - x_{k-1})}_{(**)} \le \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f_n)(x_k - x_{k-1})}_{*} +$$

$$+ \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{2\varepsilon}{3(b-a)}(x_k - x_{k-1})}_{\frac{2\varepsilon}{3}}$$

$$(*) = S(f_n) - s(f_n)$$

$$(**) = S(f) - s(f)$$

$$S(f) - s(f) \le \underbrace{S(f_n) - s(f_n)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S(f) - s(f) < \varepsilon$$

$$S(f) - s(f) = \sum_{k=1}^{n} \Big( \underbrace{\sup_{x' \in [x_{k-1}; x_k]} f(x') - \inf_{x'' \in [x_{k-1}; x_k]} f(x'')}_{\omega_k(f) = \sup\limits_{x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]} (f(x') - f(x''))} \Big)(x_k - x_{k-1}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x', x'' \in [x_{k-1}, x_k] \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} + |f_n(x') - f_n(x'')|$

1) sup правой части по всем $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega_k(f_n)$$

2) sup левой части по $x', x''$

$$\omega_k(f) < \frac{2\varepsilon}{3(b-a)} + \omega_k(f_n) \Rightarrow$$

$\Rightarrow S - s < \frac{2\varepsilon}{3} + \underbrace{S(f_n) - s(f_n)}_{< \frac{\varepsilon}{3}} \Rightarrow$ инт-ма

Надо д-ть, что $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx \overset{?}{=} \int f(x)\,dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N: \quad \left|\int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon$

Воспользуемся равном. сход.-тью

$\{f_n\} \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall x \in [a, b]$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

$$(*) = \left|\int\limits_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \int\limits_a^b \frac{\varepsilon\,dx}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

**Теор. 10'** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \rightrightarrows u(x)$ на $[a,b]$ Лекция 10 03.10.18

$\forall n$: $u_n(x)$ интегр.-ма на $[a,b]$

Тогда $u(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)\,dx$$

(возможно почленное интегр.-ние)

Почл. интегр. в функц. ряде / посл.-ти возможно для более широкого класса, чем равном. сход.

---

**Теор. 11** (дифференцируемость)

Пусть $\{f_n(x)\}$ на $X=[a,b]$ и
1) $f_n(x)$ $(\forall n)$ дифф-ма на $[a,b]$
2) $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной $x_0 \in [a,b]$
3) $\{f_n'(x)\} \rightrightarrows$ на $[a,b]$

Тогда: 1. $\{f_n(x)\} \rightrightarrows$ на $[a,b]$ к некоторой $f(x)$
2. $f(x)$ дифф-ма на $[a,b]$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x)$

① Рассмотрим

$$\underbrace{[f_{n+p}(x) - f_n(x)]}_{F(x)} - \underbrace{[f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)]}_{F(x_0)} = F'(\xi)(x-x_0)$$

$\exists \xi$ между $x_0$ и $x$

$$= \left(f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right)(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \left|\left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right) - \left(f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

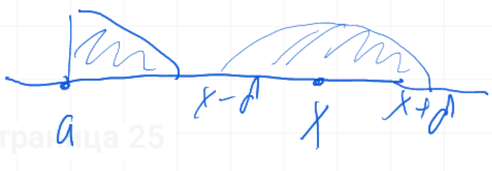
$$f_{n+p}(x) - f_n(x) < 2\varepsilon$$

② Для д-ва дифф-ти $f(x)$ на $[a,b]$ составим разностное отношение для $f(x)$ в $\forall$т. $x \in [a,b]$

$$\varphi(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad \varphi_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}$$

Здесь $h$ таково, что:

- если $x \in (a;b)$, то $0 < |h| < \delta$, где $(x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$




- если $x = a$, то $h \in (0, \delta)$: $a + \delta < b$
- если $x = b$, то $h \in (0, \delta)$: $b - \delta > a$

страница 25

Докажем, что $\exists \lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) \overset{?}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{h\to 0} \varphi_n(h)$

В силу теор. 8' достаточно показать, что

$\{\varphi_n(h)\} \rightrightarrows \varphi(h)$ на указ-х мн-вах изм. $h$

$$\varphi_{n+p}(h) - \varphi_n(h) = \frac{f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)}{h} - \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} =$$

$$= \frac{\left(f_{n+p}(x+h) - f_n(x+h)\right) - \left(f_{n+p}(x) - f_n(x)\right)}{h} =$$

$\exists\, \xi$ между $x,\ x+h$

$$= \frac{\left(f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right)h}{h} = f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)$$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}\ \forall \xi \in [a,b]: \left|f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)\right| < \varepsilon$ ■

---

**Теор. 11:** Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на $[a,b]$ облад. след. св-ми:

1) $u_n(x)$ дифф-ма на $[a,b]$ 2) ряд сх-ся хотя бы в одной т. из $[a,b]$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \rightrightarrows$ на $[a;b]$

Тогда: ① ряд сходится равномерно на $[a,b]$ к $u(x)$

② $u(x)$ дифф.-ма и возможно почленно дифф.-ма $\left(\frac{d}{dx}\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)\right)$

**Теор. 12** Пусть $\{f_n(x)\} \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$ и каждая $f_n(x)$ имеет первообр. на $X = [a, b]$. Тогда $f(x)$ имеет первообр. на $X$

▶ $\exists\ \varphi_n(x)$ – первообр. ф-ции $f_n(x)$.

Рассм. ф-цию $\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi_n(x_0)$ $\forall x_0 \in (a, b)$

– первообр. для $f_n(x)$.

Т.к. $\psi_n'(x) = f_n(x) \rightrightarrows$ на $X$.

$\psi_n(x_0) = 0$ $\forall n$, т.е. $\{\psi_n(x_0)\}$ сходится

то $\{\psi_n(x)\} \rightrightarrows$ на $X$ к $\psi(x)$ и $\psi'(x) = f(x)$ (т. 11).

---

## §4. Сходимость в среднем и почленное интегрирование

$\{f_n(x)\}$ на $[a, b]$; $f(x)$ на $[a, b]$

Пусть $f_n(x)$, $f(x)$ интегр.-мы на $[a, b]$ $\forall n$

Тогда $[f_n(x) - f(x)]^2$ интегр. на $[a, b]$.

**Опр.** $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ в среднем на $[a, b]$, если $\int_a^b (f_n(x) - f(x))^2\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Опр.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится к $u(x)$ в среднем, если $\{S_n(x)\} \to u(x)$ в среднем

---

1. Связь с другими видами сход.-ти

Утв. 1 Если $\{f_n(x)\} \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ то она сх.-ся и в среднем к $f(x)$

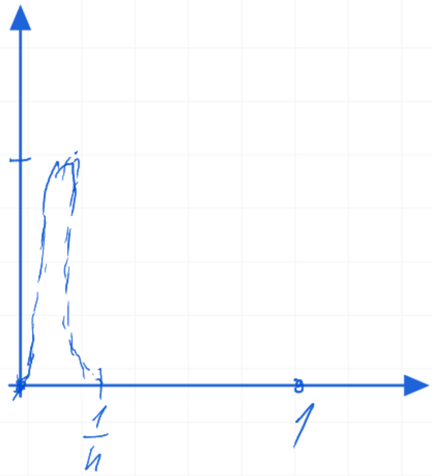
▶ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N\ \forall x \in [a,b]\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1 \frac{1}{b-a}} \Rightarrow \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^2 (b-a) = \varepsilon_1$ ■

---

Утв. 2 Обратное утверждение к утв. 1, вообще говоря, неверно.

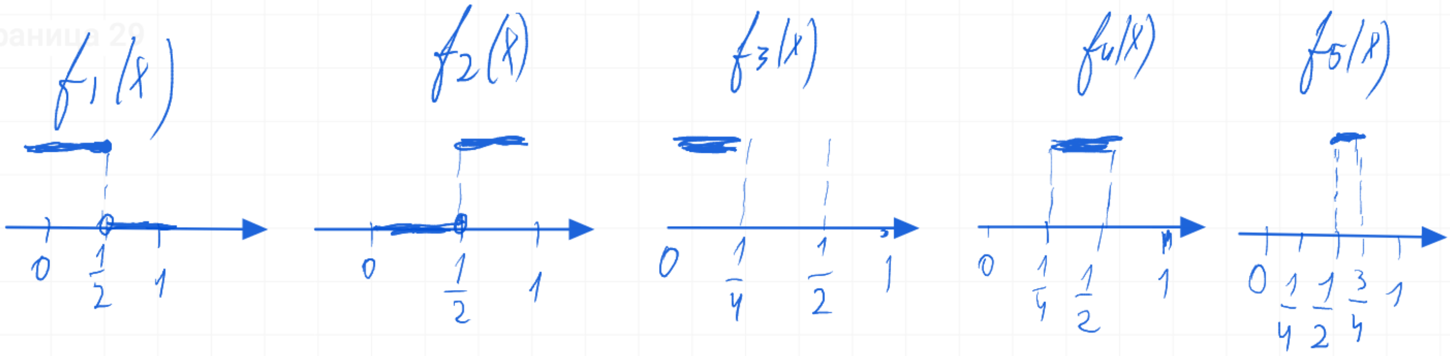
▶ $f_n(x) = \begin{cases} \sin(\pi n x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$

$\int\limits_0^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} \sin^2(\pi n x) dx \leq \frac{1}{n} \to 0$




---

Утв. 1 Из сход.-ти в среднем $\{f_n(x)\}$, вообще говоря, не следует даже сходимость в одной точке




$\{f_n(x)\}$ не сход. ни в 1 т.

$\forall x_0 \in [0;1]$ $\{f_n(x_0)\}$ содерж. бесконечно много 0 и 1

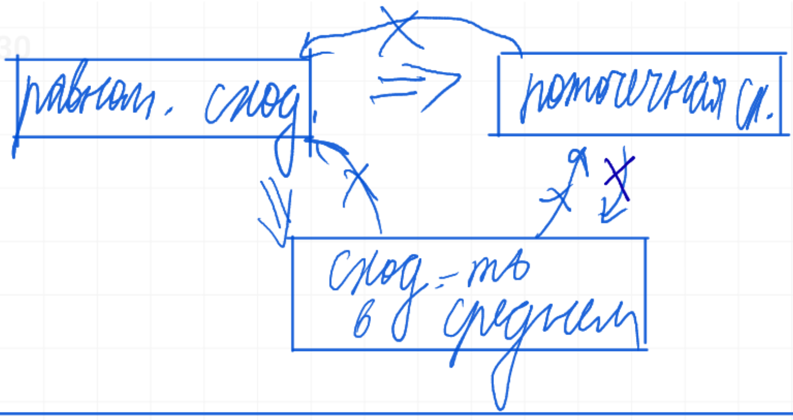
$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx, \quad \text{т.к.} \left[\begin{array}{l} f_n(x)=0 \\ f_n(x)=1 \end{array}\right. \ \forall x$$

$$\int_0^1 f_1(x)\,dx = \frac{1}{2} = \int_0^1 f_2(x), \quad \int_0^1 f_3(x)\,dx = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \underbrace{\frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{4}}_{4}, \underbrace{\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{8}}_{8}$$

$\{f_n(x)\}$ сход. к нулю в среднем

Лекция 11
9.10.18




Пример:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha e^{-nx}, & 0<x\le 1 \\ 0, & x=0 \end{cases} \xrightarrow{\text{поточечно}} f(x)\equiv 0$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{e^{nx}} = 0$; Выясним, при каких $\alpha$ $f_n(x)$ сх. к $f(x)\equiv 0$ в среднем

$$\int_0^1 [f_n(x)-f(x)]^2\,dx = \int_0^1 n^{2\alpha}e^{-2nx}\,dx = n^{2\alpha}\left(-\frac{1}{2n}\right)e^{-2nx}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} n^{2\alpha-1}\underbrace{(1-e^{-2n})}_{\to 1} \to 0 \iff 2\alpha-1<0$$

$f_n(x)$ сх. к $f(x)=0$ в средн. при $\alpha<\frac{1}{2}$

При $\alpha\ge\frac{1}{2}$ посл-ть $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем к 0 (хотя сходится поточечно)

**Теор. 13** $\exists \{f_n(x)\}$, которая сх. в среднем к $f(x)$ на $[a,b]$, и все ф-ции $f_n(x)$, $\forall n$, и $f(x)$ интегр.-мы по Риману.

Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

---

**Лемма.** Для любых интегр.-х на $[a,b]$ ф-й $g(x)$, $f(x)$ справедливо нер-во:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx$$

▶ Отображение:

$$f, g \longrightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx$$ явл. скалярн. произвед.-м,

при этом не выполн. II часть последней аксиомы ■

---

опр. скал. произв.

$E$ – лин. вещ. пр-во: $\forall a,b \in E \mapsto (a,b) \in \mathbb{R}$

1) $(a_1+a_2; b) = (a_1, b) + (a_2, b)$ $\forall a_1, a_2, a, b \in E$

$(\alpha a, b) = \alpha(a,b)$ $\forall \alpha \in E$

2) $(a,b) = (b,a)$ $\forall a,b \in E$

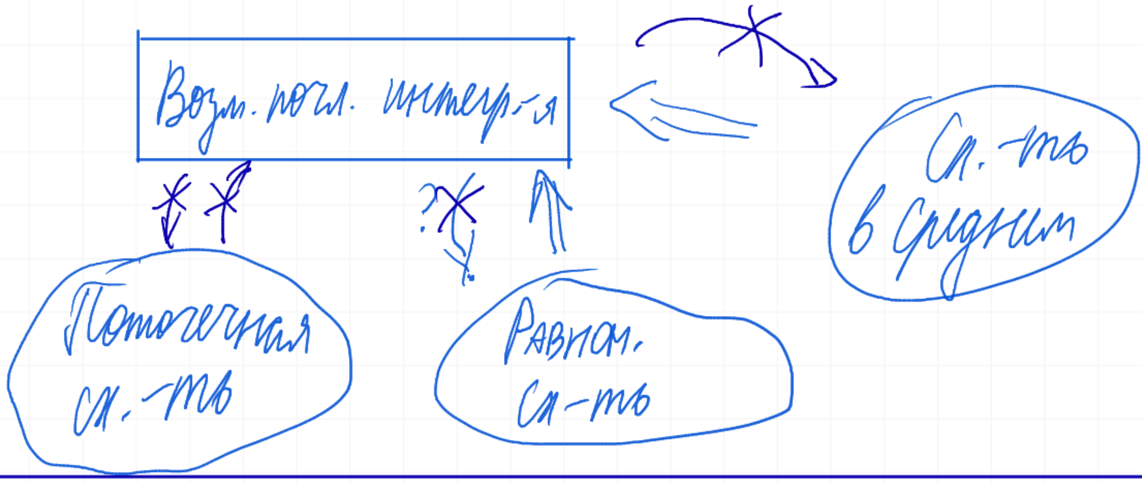
3) $(a,a) \geq 0$ $\forall a \in E$ и $(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$

▶ (теор. 13)

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f_n(x) - f(x))\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \overset{(*)}{\le} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx\,(b-a) \to 0$$

---




---

Пример

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\alpha e^{-nx}, & 0 < x \le 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \longrightarrow f(x) \equiv 0$$

Выясним, когда для $\{f_n(x)\}$ справедливо утв. т. 13

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 n^\alpha e^{-nx}\,dx = n^\alpha \cdot \frac{1}{n} \cdot (1 - e^{-n}) \to 0 \Leftrightarrow \alpha < 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0$$

почл. инт. возможно

$$\sup_{0 \le x \le 1} |f_n(x)| = n^\alpha \to 0 \Leftrightarrow \alpha < 0,$$ т.е. только в этом случае $\{f_n(x)\} \rightrightarrows 0$

Рассм. пример, кот. был построен в конце предыд. лекции: $\{f_n(x)\}$ сх. к 0, но не сх. н-и в 1 точке $[0,1]$

Здесь $f_n^2(x) = f_n(x)$ $\forall n, \forall x \Rightarrow \int_0^1 f_n^2(x)dx = \int_0^1 f_n(x)dx \to 0$

## §5. Равностепенная непрерывность ф. посл.-ти. Теор. Арцела

Cezare Arzela

**Теор. Больцано - Вейерштрасса**

Из $\forall$ огран. $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ можно выделить сход.-ся подпосл.-ть.

$$\underset{\text{непр.-на}}{\{f_n(x)\}} \overset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \underset{\text{непр.-на}}{f(x)}$$

? Из $\forall$ равном. огр.-й посл.-ти непр. ф-й $\{f_n(x)\}$ на $X$ можно выделить равномерно сходящуюся подпосл.-ть?

Данное утв. неверно:

$$f_n(x) = x^n, \quad 0 \le x \le 1$$

$$\downarrow \ \cancel{\rightrightarrows}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

страница 33

Опр.) $\{f_n(x)\}$ явл.-ся равностепенно непр.-й на $X \subset \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ \forall x', x'' \in X \ |x' - x''| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$$

---

Зам. Из опред. следует, что все $f_n(x)$ равном. непр. на $X$, и, в частности, непр. на $X$

---

Утв. 1 Пусть $f_n(x)$, $\forall n$ диф.-мы на $[a, b]$ и $\{f_n'(x)\}$ равномерно огран. на $[a, b]$. Тогда $\{f_n(x)\}$ равностеп. непр.-на на $[a, b]$

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |f_n'(\xi)(x' - x'')| \le M|x' - x''| < M\delta = \varepsilon$$

$\exists \xi = \xi(n, x', x'')$ между $x'$ и $x''$

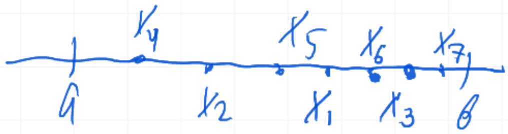
---

Теор. 14 (Арцела) Пусть $\{f_n(x)\}$ на $[a; b]$:

1. равном. огр.
2. равном. непр.-на

Тогда из неё можно выделить равном. сход.-ся подпосл.-ть

▶ 1) Построим на $[a,b]$ следующую посл.-ть точек $\{x_n\}$




и т.д.

$\forall \delta > 0 \ \exists n_0$: на $\forall$ отр. длины $\delta$ из $[a,b]$ находится хотя бы одна из точек $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$

2) Рассм. $\{f_n(x)\}$ в т. $x_1$: $\{f_n(x_1)\}$ — огран. чис. посл.-ть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ выделяем из неё сход. подпосл.-ть: $\{f_{1n}(x_1)\}$

Рассм. $\{f_{1n}(x)\}$ в т. $x_2$: $\{f_{1n}(x_2)\}$ — огран. чис.-посл.-ть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ выделим из неё сход. подпосл.-ть $\{f_{2n}(x_2)\}$, $\{f_{2n}(x_1)\}$ — тоже сход.-ся

Рассм. $\{f_{2n}(x)\}$ в т. $x_3$ и т.д.

$f_{11}(x)$, $f_{12}(x)$, $f_{13}(x)$, … сход. в т. $x_1$

$f_{21}(x)$, $f_{22}(x)$, $f_{23}(x)$, … сход в т. $x_1, x_2$

…

$f_{m1}(x)$, $f_{m2}(x)$, $f_{m3}(x)$, … сход. в т. $x_1, x_2, \dots, x_m$

Составим „диагональную" подпосл.-ть $F_n(x) = f_{nn}(x)$

Покажем, что именно она и явл. равномерно сход. на $[a,b]$

а) Т.к. вся посл.-ть $\{f_n(x)\}$ равностепенно непр. на $[a,b]$, то и $\{F_n(x)\}$ тоже равностеп. непр. на $[a,b]$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, x_m \in [a,b] : |x - x_m| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |F_n(x) - F_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

б) Разобьём отрезок $[a,b]$ на части, длина каждой из которых $< \delta$. Тогда $\exists n_0 \in \mathbb{N}$: на каждой из этих частей есть хотя бы одна из точек $x_1, \dots, x_{n_0}$

Отметим, что посл.-ть $\{F_n(x)\}$ сх.-ся в каждой точке $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$

Тем самым, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall n \geq N \ \forall p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} |F_{n+p}(x_1) - F_n(x_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |F_{n+p}(x_2) - F_n(x_2)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ \dots \\ |F_{n+p}(x_{n_0}) - F_n(x_{n_0})| < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

б) Доказываем равномерную сходимость $\{F_n(x)\}$ на $[a;b]$, проверяя усл. Коши:

$$|F_{n+p}(x)-F_n(x)| = |F_{n+p}(x) - F_{n+p}(x_m) + F_{n+p}(x_m) + F_n(x_m) - F_n(x)| \le$$

$\forall x \in [a,b]$ используем $x_m : |x-x_m|<\delta$ $(m=1,\dots,n_0)$

$$\le |F_{n+p}(x) - F_{n+p}(x_m)| + |F_{n+p}(x_m) - F_n(x_m)| + |F_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

---

лекция 12
10.11.18

Зам. В силу равностепенной непрерывности $\{f_n(x)\}$ в т. 14 условие равном. огр.-ти можно заменить условием её огр.-ти хотя бы в одной точке $x_0 \in [a,b]$. Покажем это.

Возьмём в опред. равностеп. непр. $\varepsilon = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \delta > 0 \;\; \forall x', x'' : |x'-x''|<\delta$
$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon = 1$

В силу огр.-ти $\{f_n(x_0)\}$ $\exists M>0$ $|f_n(x_0)| \le M_0$

Разобьём $[a,b]$ на попарно непересек. части, каждая длины $< \delta$


$$f_n(x) = f_n(x) - f_n(x_p) + f_n(x_p) - f_n(x_{p+1}) +$$

$$+ f_n(x_{p+1}) - f_n(x_{p+2}) + \ldots + f_n(x_q) - f_n(x_0) + f_n(x_0)$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_p)| + |f_n(x_p) - f_n(x_{p+1})| + \ldots +$$

$$+ |f_n(x_q) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)| \leq 1(q-p+1) + M \leq \underbrace{N}_{\text{кол.-во отр. разбиения}} + M$$

## §6. Степенные ряды

Рассм. $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \mathbb{R}$

коэф. ряда   центр

Опр.) Ряд вида $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, $x$ – переменная называ.-ся **степенным рядом**

Без огранич. общности, считаем, что $x_0 = 0$, и также степ. ряд будем записывать и след. образом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \dots (1)$$

Отметим, что (1) всегда сходится при $x=0$

Теор. 15 (**Коши, Адамар**) Jacques Hadamard (1864 – 1963)

Пусть $L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Тогда: ① Если $L = +\infty$, то (1) сходится только в т. $x=0$

② Если $L>0$, то (1) сходится для $x$: $|x| < \frac{1}{L}$ и расходится для всех $|x| > \frac{1}{L}$

③ Если $L=0$, то (1) сходится при $\forall x \in \mathbb{R}$


$R = \frac{1}{L}$ — радиус сх-ти (1)

---

▶ ① $\Rightarrow \exists \left\{ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right\} \to +\infty$ $\forall x>0\ \exists k_0 : \forall k \geq k_0 :$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{1}{|x|} \Rightarrow \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\,|x| > 1 \Rightarrow |a_{n_k}|\cdot|x|^{n_k} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для (1) наруш. необх. усл. сход-ти

---

③ $L = 0 \Rightarrow 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

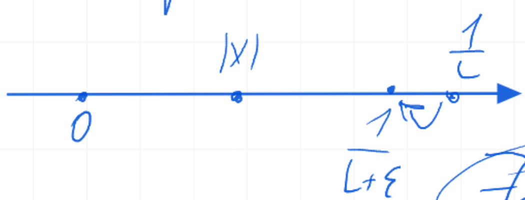
Рассм. $\forall x > 0$:

Для величины $\frac{1}{2|x|}$ $(= \varepsilon)$ $\exists N\ \forall n \geq N : \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|} \Rightarrow$

$\Rightarrow |a_n|\,|x|^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n$;   $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ сход-ся

---

② Рассмотрим $\forall x : |x| < \frac{1}{L}$



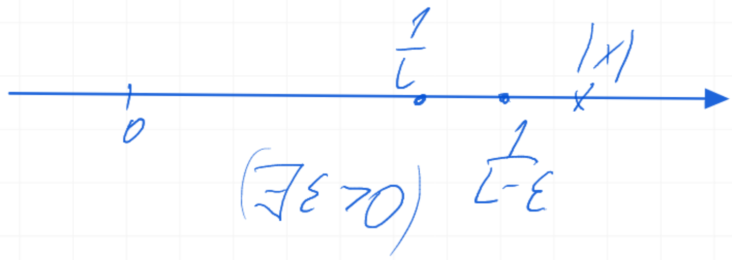

$\Rightarrow |x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$   $\exists \varepsilon > 0$

Т.к. $L$ — верхний предел, то для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n \geq N$

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| < \frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}$$

Тогда: $\sqrt[n]{|a_n|}\,|x|^n < \left(\underbrace{\frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon}}_{<1}\right)^n$

Рассм. $\forall x: \ |x| > \frac{1}{L}$




$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0: \ |x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$

В силу опред. верхнего предела:

$\Rightarrow \ \exists \{n_k\}: \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \to L \ \Rightarrow$ для того же $\varepsilon > 0$

$\exists k_0: \ \forall k \geq k_0 \qquad L-\varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L+\varepsilon$

$\Rightarrow \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \cdot |x| > \frac{L-\varepsilon}{L-\varepsilon} = 1 \ \Rightarrow \ |a_{n_k}| \cdot |x|^{n_k} > 1 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для ряда (1) нарушено необх. усл. сход-ти $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ расх.

---

Зам. 1 Если в т. 15 $L > 0$, то поведение ряда (1) в концевых точках интервала $\left(-\frac{1}{L}; \frac{1}{L}\right)$ может быть различным

$(L=1)$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ — расх. при $x = \pm 1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ — сх.-ся при $x = \pm 1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ — расх. при $x=1$, сх. при $x=-1$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ — сх. при $x=1$, расх. при $x=-1$

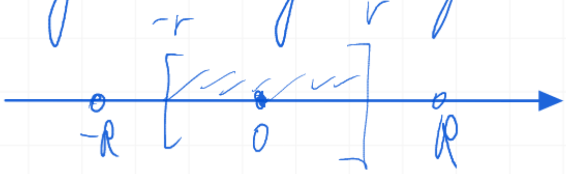
---

Зам. 2 Можно рассм. степенные ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, в кот. коэффициенты $\in \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$. Здесь также можно доказать теор. 15 с той же ф-лой для $L$.

# Функциональные св-ва степенного ряда

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящийся на $|x|<R = \frac{1}{L}$
(где $R>0$ или $R=+\infty$)

**Лемма 1** Для $\forall r>0: r<R$ ряд (1) сходится равномерно (и абсолютно) на $\{|x|\le r\}$




▶ Имеет место оценка: $|a_n||x|^n \le |a_n| r^n$ на мн-ве $\{|x|\le r\}$. Кроме того, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ сход. абсолютно. В силу призн. Вейерштрасса есть равномерная сход.-ть на $\{|x|\le r\}$ ■

**Лемма 2**

При почленном дифф./инт. степенного ряда его радиус сход.-ти не меняется

▶ (2) ... $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \overbrace{a_{k+1}(k+1)}^{= b_k} x^k$

(3) ... $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \int a_n t^n dt = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

$$\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{|a_{k+1}|(k+1)} = \left(\sqrt[k+1]{|a_{k+1}|}\underbrace{\sqrt[k+1]{k+1}}_{\to 1}\right)^{\overbrace{\frac{k+1}{k}}^{\to 1}}$$

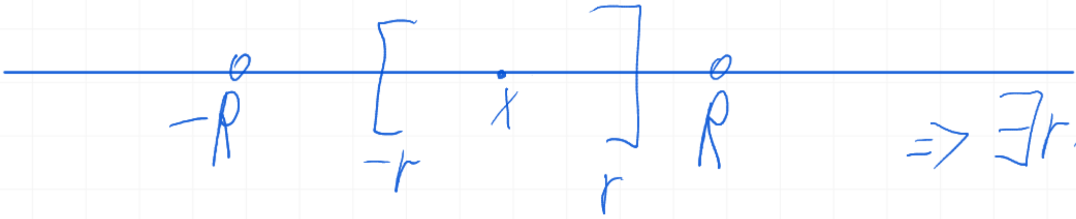
$\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{b_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k+1]{|a_{k+1}|} = L$. (Ряд 3 рассм.-ся аналогично) ■

<u>Теор. 16</u> Ряд (1) внутри интервала сх-ти можно дифф.-ть и интегр.-ть любое число раз, причём получаемые ряды имеют те же радиусы сх-ти

Сумма степенного ряда явл. бесконечно дифф.-й функцией на $(-R;R)$

▶ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$, $-R<x<R$

Пусть $x$ — любое фикс. число на $(-R;R)$




$\Rightarrow \exists r<R: \ x\in[-r;r]$

Т.к. (л. 1) ряд (1) равном. сх-ся на $[-r;r]$, то $f(x)$ непр. на $[-r;r] \Rightarrow f(x)$ непр. в т. $x\in(-R;R)$

Т.к. почленно продифф. ряд (1):

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ имеет тот же радиус сх. (1.2),

то (л. 1) последний ряд равном. сходится на $[-r;r] \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$

Аналог. утв. имеет место для $f''$, $f^{(3)}$, ...
на $-R < x < R$.

Т.к. (л. 1) ряд (1) равном. сх-ся на $[0; r]$, $r < R$,
то (1) допускает почленное интегр.-е:

$$\int_0^r f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{r^{n+1}}{n+1}.$$

(В силу л. 2 это можно делать беск. число раз) ■

---

__Теор 17__ Если $f(x) \in C^{\infty}(-R, R)$ разложена на $(-R; R)$ в степенной ряд (1), то $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{f''}{2!}$, ..., $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ..., т.е. ряд (1) явл. рядом Маклорена для $f(x)$

▶ Ук.-нные ф-лы следуют из возможности диффер. почленно любое кол.-во раз (теор. 16) ■

недописано

(16.10 + 17.10)

~~Т.к. ($\Lambda_1$) ряда (1) равном. сх. на $[0,r]$ ($r<R$), то~~
~~(1) допускает почленное инт-ие: $\int_0^r f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{r^{n+1}}{n+1}$~~

~~(T17) Если $f(x)\in C^{\infty}(-R,R)$ разложима на $(-R,R)$ в степ. ряд (1),~~
~~то $a_0=f(0)$, $a_1=f'(0)$, $a_2=\frac{f''(0)}{2!}$, ..., $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ..., т.е.~~
~~ряд (1) явл. рядом Маклорена для $f(x)$~~
~~Д-во: ? следует из возм-ти почленного диф-ия ? (T16)~~

16.10. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, (-R;R)$ $\quad a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ \forall n$

$\quad \|$

$f(x)$ - беск. диф-ма на $(-R,R)$

Зам. Усл. того, что ф-я $f(x)$ беск. д-ма в окр-ти центра разложения не явл. дост. усл. для её разложения в степ. ряд.

Пр. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

! $f(x)\in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{t\to\infty} e^{-t}=0$; $\quad f'(0)=\lim \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0\pm 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \overset{t=\frac{1}{h^2}}{=} \lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t}}{\pm\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t\to\infty}\frac{\pm\sqrt{t}}{e^{t}}$

$\frac{1}{x^2}=t$

$f'(x) \underset{x\neq 0}{=} e^{-\frac{1}{x^2}}(-(-x^{-3}))=\frac{1}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $\lim_{x\to 0} f'(x)=0=f'(0)$

Продолжая аналогично: $f^{(n)}(0)=0\ \forall n$

Её нельзя разложить в степ. ряд в окр-ти т. $x_0=0$
Если бы, то тогда $a_n=0\ \forall n$.

Утв. Чтобы беск. диф-ая ф-ия $f(x)$ была разложима в степ. ряд на $(-R,R)$ необх. и дост. чтобы ост. член ряда Маклорена для неё стремился к 0.

Разложение некоторых эл. ф-ий в ряды Тейлора

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$

(ф. Лагр.): $R_{n+1}(x) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$

Если $x \in [-r, r]$, то $\xi \in [-r, r]$

$\Rightarrow |R_{n+1}(x)| \le \underbrace{\frac{e^r}{(n+1)!} r^{n+1}}_{\to 0 \text{ при } n\to\infty}$

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ сх. при $x \in \mathbb{R}$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n + R_{2n+3}(x)$

$|R_{2n+3}(x)| \le \underbrace{\frac{r^{2n+3}}{(2n+3)!}}_{\to 0}$, если $x \in [-r, r]$

$\Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сход. при $\forall x \in \mathbb{R}$

- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ сход. при $\forall x \in \mathbb{R}$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x)$

Если $x \in [0; 1]$, то $|R_{n+1}(x)| \le \frac{1}{n+1} \to 0$

Если $x \in (-1; 0] \Rightarrow x \in [-r, 0]$, $0 < r < 1$, то $|R_{n+1}(x)| < \frac{r^{n+1}}{1-r} \to 0$

$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ - сх-ся при $x \in (-1; 1]$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_{n+1}(x)$

(ф. Коши) $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} x^{n+1} (1-\theta)^n =$

$= \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1} = \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n}_{<1 \text{ огр.}} \overset{*}{(\text{умн-е})}$

$\underset{(\text{умн-е})}{\overset{*}{}}$ $\boxed{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{n!} x^n} \boxed{(1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot x} \to$ между $|x|(1+|x|)^{\alpha-1}$ и $|x|(1-|x|)^{\alpha-1}$ $\Rightarrow$ огр.

$0 < \theta < 1$

(*)

Как выглядят слагаемые в ф-ле Макл.

для $(1+x)^{\alpha-1}$ => общ. член имеет вид $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n$.

Для того, чтобы д-ть, что $(*)\to 0$, покажем, что

ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!}x^n$ сх-ся, если $x\in(-1,1)$

(пр. Дал.) $\frac{p_{n+1}}{p_n}=\frac{(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(\alpha-n-1)}{(n+1)!}x^{n+1}\cdot\frac{n!}{(\alpha-1)\dots(\alpha-n)x^n}=$

$=\frac{\alpha-n-1}{n+1}\cdot x \Rightarrow \left|\frac{p_{n+1}}{p_n}\right|=\frac{|\alpha-n-1|}{n+1}|x|$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{p_{n+1}}{p_n}\right|=1\cdot|x|<1$

$(1+x)^{\alpha}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ сх. при $|x|<1$

$\operatorname{arctg}x=\int\limits_0^x\frac{dt}{1+t^2}\underset{0<x<1}{=}\int\limits_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}t^{2n}\,dt=$

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int\limits_0^x(-1)^n t^{2n}\,dt=\sum(-1)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x|<1$

$\arcsin x=\int\limits_0^x\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $(1+t^2)^{-1}=1-t^2+t^4-t^6+\dots$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ при $x\in\mathbb{C}$ : $R=$ <ф-ла Коши-Адамара>
$|x|<R$

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$ $\forall x\in\mathbb{C}$
$x\to ix$

$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\dots$ $\forall x\in\mathbb{C}$

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots$ $\forall x\in\mathbb{C}$

$e^{ix}=1+\frac{ix}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\dots=\cos x+i\sin x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

§1 Обобщенные методы суммирования числ. рядов.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \to S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ ; $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = S$ - сумма ряда

$\leadsto$ $\boxed{\text{пр-по} \circledast}$ $\leadsto$ $U$ - обобщ. сумма

1°. Метод Чезаро (ср. арифм-х

(1) $\leadsto S_N$; $\lim \dfrac{S_1+S_2+\ldots+S_N}{N} = U$

если $\exists$

Любой метод суммирования числ. ряда 1) считается математически корректным, если:

1) линейность $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leadsto U$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \leadsto V \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \leadsto \alpha U + \beta V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2) регулярность: если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сх. в обычном смысле к $S$, то у него есть обобщ. сумма и она $= S$

(Т16) Метод Чезаро линеен и регулярен

Д-во: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leadsto S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \to \sigma_N = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$

$\exists \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_1+\ldots+S_N}{N} = U \qquad \exists \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_N}{N} = V$

$\dfrac{(\alpha S_1+\beta\sigma_1)+\ldots+(\alpha S_N+\beta\sigma_N)}{N} \to \alpha U + \beta V$

Рег-ть! Пусть (1) сх. Тогда

$\exists \lim\limits_{N\to\infty} S_N = S \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{S_1+S_2+\ldots+S_N}{N} = S$

см. Т. о пр-ках Коши, Даламбера.

Пр!

① Если у ряда (1) $S_N \to +\infty$, то $\dfrac{S_1+\ldots+S_N}{N} \to +\infty$

② $\sum (-1)^n = -1+1-1+1-\ldots$

$S_1 = -1,\ S_2 = 0,\ S_3 = -1,\ S_4 = 0, \ldots \Rightarrow \dfrac{S_1+\ldots+S_N}{N} \overset{N=2m}{=} \dfrac{-m}{2m} = -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{S_1+S_2+\dots+S_N}{N} \underset{N=2m+1}{=} \frac{-m-1}{2m+1} \to -\frac{1}{2}$$ ← обобщ. сумма

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta$ – доказать, что его обобщ. сумма $= -\frac{1}{2}$ $\forall \theta$
$0<\theta<2\pi$

$2^\circ$ Метод Абеля.

Вместо ряда (1) рассм. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n-1}$
Если этот ряд сход. при всех $x\in(0,1)$ и его сумма равна $f(x)$, и, кроме того $\exists \lim_{x\to 1-0} f(x) = U$
то говорят, что ряд (1) сумм-ся методом Абеля и его обобщ. сумма $= U$

17.10. Пр: ① $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n-1} = \frac{-1}{1+x}$
$0<x<1$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{-1}{1+x} = -\frac{1}{2}$$ (мет-ом Чезаро также)

② $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n x^{n-1} = f(x)$ конечн. сх-сь

$$\int_0^x \sum (-1)^n n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n \int_0^x t^{n-1} dt =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{-x}{1+x} = \int_0^x f(t)dt \Rightarrow f(x) = \left(\frac{-x}{1+x}\right)' =$$
$$= \left(-1+\frac{1}{1+x}\right)' = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

③ Док-ть, что ряд в ② не суммируем м. Чезаро

$T_{18}$ Метод Абеля линеен и регулярен

Д-во: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$: $\exists \lim_{x\to 1-0} \sum a_n x^{n-1} = U$
$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$: $\exists \lim_{x\to 1-0} \sum b_n x^{n-1} = V$

$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$: $\lim\limits_{x\to1-0}\sum(\alpha a_n+\beta b_n)x^{n-1}=\alpha U+\beta V$

Реш-ие:

? Если $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ сх-ся, то $\exists\lim\limits_{x\to1-0}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}=S$?

Рассм. част. суммы $S_N=\sum_{n=1}^{N}a_n\ \forall N\geq1$

$S_0=0$ (положим так)

$$\sum_{n=1}^{p+1}a_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{p+1}(S_n-S_{n-1})x^{n-1}=\sum_{n=1}^{p+1}S_nx^{n-1}-$$

$$-\sum_{n=2\ (\text{т.к. } S_0=0)}^{p+1}S_{n-1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{p+1}S_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{p}S_nx^{n}=$$

$$=\sum^{p}S_n(x^{n-1}-x^n)+S_{p+1}x^p$$

$$\sum_{n=1}^{p+1}a_nx^{n-1}=(1-x)\sum_{n=1}^{p}x^{n-1}S_n+S_{p+1}x^p,\quad 0<x<1$$

В пр. ч. при $p\to\infty$: $\underbrace{=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}S_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}}_{f(x)}$

$(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}Sx^{n-1}=1\cdot S$ (заметим)

$$\sum^{\infty}a_nx^{n-1}-S=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-S)x^{n-1}\overset{\forall n_0}{=}$$

$$=(1-x)\sum_{n=1}^{n_0-1}(S_n-S)x^{n-1}+\underbrace{(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty}(S_n-S)x^{n-1}}$$

$\forall\varepsilon>0\ \exists n_0:\ \forall n\geq n_0\ |S_n-S|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$

$$\Big|\underbrace{(1-x)}_{>0}\sum_{n=n_0}^{\infty}(S_n-S)\underbrace{x^{n-1}}_{>0}\Big|\leq(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty}|S_n-S|\cdot x^{n-1}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=n_0}^{\infty}x^{n-1}<\frac{\varepsilon}{2}(1-x)\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}}_{=\frac{1}{1-x}}=\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in(0,1)$$

$$|\ldots| \le (1-x)\sum_{n=1}^{n_0-1} \underbrace{|S_n - S|}_{\text{огр.}} x^{n-1} \le (1-x)\, C \cdot 1 \cdot (n_0-1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

(за счёт $x$, близкого к 1)

$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ 0<1-x<\delta \quad \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} - S\right| < \varepsilon.$

Пр: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$ не сх-ся м. Чезаро, сх-ся м. Абеля.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ сх-ся и м. Чезаро, и м. Абеля.

T20 (сравнение 2х м-в сум-ия)

Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет обобщ. сумму $A$ по м. Чезаро, то он сх-ся м. Абеля, причём также к $A$

Д-во: Пусть пос-ть $\sigma_N = \frac{S_1+S_2+\ldots+S_N}{S_N} \to A$

Д-м: $\exists \lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = A$

$$\sigma_N = \frac{(S_1+\ldots+S_{N-1})+S_N}{N} = \frac{(N-1)\sigma_{N-1}+S_N}{N}$$

$\Rightarrow S_N = N\sigma_N - (N-1)\sigma_{N-1};\ \sigma_0 = 0 \quad \forall N \ge 1$

(повторяем ан-но)

$$\sum_{n=1}^{p+1} S_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{p+1} (n\sigma_n - (n-1)\sigma_{n-1})x^{n-1} = \sum_{n=1}^{p} n\sigma_n x^{n-1} - \sum_{n=2}^{p+1}(n-1)\sigma_{n-1}x^{n-1} + (p+1)\sigma_{p+1}x^p = \sum_{n=1}^{p}(n\sigma_n x^{n-1} - n\sigma_n x^n) + (p+1)\sigma_{p+1}x^p = (1-x)\sum_{n=1}^{p} n\sigma_n x^{n-1} + (p+1)\sigma_{p+1}x^p$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{p+2} a_n x^{n-1} = (1-x)^2\sum_{n=1}^{p} n\sigma_n x^{n+1} + \underbrace{(1-x)(p+1)\sigma_{p+1}x^p}_{\to 0} + (\underbrace{(p+2)\sigma_{p+2} - (p+1)\sigma_{p+1}}_{\text{''}-\text{''}})x^{p+1}$$

уб-экспон. (ну)

$0<x<1$ растёт линейно (и-если пред.)

р-во: $(1-x)^2 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n\sigma_n x^{n-1}}_{\text{сход. по пр-ку Коши}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$

$$\sqrt[n]{n\sigma_n x^{n-1}} \to |x|<1$$

$$(1-x)^2 \sum n x^{n-1} = 1 \,|\cdot A$$

$$\sum a_n x^{n-1} - A = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(\sigma_n - A)x^{n-1} = (1-x)^2 \sum_{n=1}^{n_0-1} n(\sigma_n - A)x^{n-1} +$$

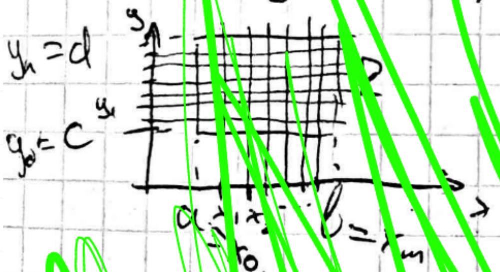
$$+ (1-x)^2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n(\sigma_n - A)x^{n-1}$$

финальная часть д-ва как в $T_{19}$.

## ~~Гл. 3 ИНТ-ИЕ Ф-ИЙ МНОГИХ ПЕР-Х.~~

### §1 Двойной интеграл: опр-ие и сущ-ие.

1°. Случай прямоуг-ка.




$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$

На $R$ задана ф-ия $u=f(x,y)$

Разб. отр-ков: $a=x_0<x_1<\dots<x_m=b$, $c=y_0<y_1<\dots<y_n=d$ $\Big\} \to$

$\to$ Разб. $R$ на частичные пр-ки $R_{kl}=[x_{k-1}\le x\le x_k]\times[y_{l-1}\le y\le y_l]$

$\forall k,l:\ (\xi_k,\eta_l)\in R_{kl}$

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} f(\xi_k,\eta_l)\cdot \underset{x_k-x_{k-1}}{\underbrace{\Delta x_k}}\cdot \underset{y_l-y_{l-1}}{\underbrace{\Delta y_l}} = I(f)$$

Диаметр $R_{kl}$ — длина ее диагонали $d_{kl}=\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_l^2}$